PROGRAMACIÓN LINEAL

Índice de temas

Fases de un estudio de Investigación de Operaciones

1.
   - Definición del problema.
   - Descripción de la meta o el objetivo.
   - Identificación de las alternativas de decisión del sistema.
   - Reconocimiento de las limitaciones.
2. Construcción de un modelo.
3. Solución del modelo.
4. Validación del modelo.
5. Implantación de los resultados finales.

Función Objetivo

- Función que representa matemáticamente el objetivo perseguido en el problema.
- Tipos de función objetivo:
  - Maximización: utilidades.
  - Minimización: costos, recorrido, etc.
- FO Máx o Mín (optimización) : $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + ...$

Restricciones

- Limitantes del modelo, recursos escasos.
- Tipos de restricciones:
  - Horas-máquina disponibles.
  - Horas-hombre disponibles.
  - Inventario disponible.
  - Limitaciones de almacenamiento.
  - Pronóstico de ventas.

Modelo completo

F.O.: $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + ...Mx_n$

Restricciones:

$$a_1x_1 + b_1x_2 + ... +m_1x_n \leq L_1$$
$$a_2x_1 + b_2x_2 + ... +m_2x_n \leq L_2$$
$$a_3x_1 + b_3x_2 + ... +m_3x_n \leq L_3$$

$$x_1, x_2, ... x_n \geq 0$$

Guía para la formulación de modelos

1. Expresar cada restricción en palabras. Poner cuidadosa atención si la restricción es un requerimiento de la forma ≥, una limitación de la forma ≤, o una de la forma =.
2. Expresar el objetivo en palabras.

Los pasos 1 y 2 permitirán después:

3. Identificar verbalmente las variables de decisión.
4. Expresar las restricciones mediante símbolos.
5. Expresar la función objetivo mediante símbolos.
6. No olvidar la restricción de no negatividad de las variables de decisión.

Ejemplo
PROTECAV produce dos líneas de equipos pesados E y F. haciendo el uso de las predicciones económicas para el próximo mes, el gerente de mercadotecnia juzga que durante ese periodo será posible vender todos los productos E y F que se puedan producir.
PROTECAV tiene utilidades de $ 5000 y $ 4000 por cada producto de E y F que se venda respectivamente. Cada producto pasa por operaciones mecánicas en los departamentos y tiene los requerimientos de tiempo por departamento.

	HORAS	
E	10	20
F	15	10
Total Disponible	150	160

Además de las operaciones en los departamentos A y B, se requiere de procesos de verificación. Los tiempos en horas de verificación y el requerimiento mínimo de horas trabajadas de acuerdo a contrato laboral es dada en la siguiente tabla:

	E	F	Requerimiento Total
Horas de Verificación	30	10	135

La alta gerencia dispone que se produzca al menos un producto F por cada 3 de E, y que la producción total sea por lo menos de 5 unidades.
Determine le plan óptimo de producción para PROTECAV.
Solución:

1. Criterio: MAX
2. F.O. Utilidad
3.Variables de decisión:
XE: Número de productos E a producir.
XF: Número de productos F aproducir.
4.Restricciones:
Disponibilidad de los departamentos A y B

10 XE +15 XF <= 150
20 XE + 10 XF <= 160

Requerimiento mínimo de verificación – contrato laboral

30 XE + 10 XF >= 135

Estrategia de Producción: producir al menos un F por cada 3 E.

XE/3 <= XF

Estrategia de Producción: producir total de por lo menos de 5 unidades.

XE + XF >= 5

5. No Negatividad:

XE, XF >= 0

Ejercicios Propuestos de Programación Lineal

1. AMAZON & Compañía posee una pequeña fábrica de pinturas para interiores y exteriores de casa para distribución al mayoreo. Se utilizan dos materiales Ay B para producir pinturas. La disponibilidad máxima de A es de 6 toneladas y la de B 8 toneladas. La cantidad diaria por tonelada de pintura para interiores y exteriores se resumen en la tabla que sigue:

Toneladas de materia prima por tonelada de pintura			
	Exterior	Interior	Disponibilidad Máxima (tons)
Materia Prima A	1	2	6
Materia Prima B	2	1	8

Un estudio de mercado ha establecido que la demanda diaria de pintura para interiores no puede ser mayor que la de pintura para exteriores en más de 1 tn. Asimismo, el estudio señala que la demanda máxima de pintura para interiores esta limitada a dos toneladas diarias. El precio al mayoreo de tonelada es de $ 3000 para la pintura de exteriores y $2000 para la pintura de interiores
¿Cuánta pintura para exteriores e interiores debe producir la compañía todos los días para maximizar el ingreso bruto?

2. La Favorita S.A. fabrica de muebles produce mesas y sillas. Tarda 2 horas en ensamblar una mesa y 30 minutos en armar unas sillas. El ensamblaje lo realizan cuatro trabajadores sobre la base de un solo turno diario de horas. Los clientes suelen comprar cuando menos cuatro sillas con cada mesa, lo que significa que la fabrica debe producir por lo menos cuatro veces más sillas que mesas. El precio de venta es de $ 135 por mesa y $ 50 por silla. Determine la combinación de sillas y mesas en la producción diaria que maximiza el ingreso total diario de la fabrica y comente el significado de la solución obtenida.
3. Un agricultor de cañete posee 200 cerdos que consumen 90 lb. De comida especial todos los dias. El alimento se prepara como una mezcla de maíz y harina de soya con las siguientes composicionea:

	Libras por libra de alimento			
Alimento	Calcio	Proteína	Fibra	Costo ($/lb)
Maiz	0.001	0.09	0.02	0.02

Harina de Soya	0.002	0.60	0.06	0.60

Los requerimientos diarios de alimento de los cerdos son:
1. Cuando menos 1% de calcio
2. Por lo menos 30% de proteína.
3. Máximo 5% de fibra

Determine la mezcla de alimentos con el mínimo costo por día

4. Sanyo S.A. planta armadora de radios produce dos modelos HiFi - 1 y HiFi - 2, en la misma línea de ensamble. La línea de ensamble consta de tres estaciones. Los tiempo de ensamblaje en las estaciones de trabajo son:

	Minutos por unidad de	
Estación de trabajo	HiFi – 1	HiFi – 2
1	6	4
2	5	5
3	4	6

Cada estación de trabajo tiene disponibilidad máxima de 480 minutos por día. Sin embargo las estaciones de trabajo requieren mantenimiento diario, que contribuye al 10%, 12% y 12% de los 480 minutos totales de que se dispone diariamente para las estaciones 1,2 y 3, respectivamente. La compañía desea determinar las unidades diarias que se ensamblarán de HiFi –1 y HiFi – 2 a fin de minimizar la suma de tiempos no ocupados (inactivos) en las tres estaciones.

5. Una compañía elabora dos productos A y B. El volumen de ventas del producto A es cuando menos el 60% de las ventas totales de los dos productos. Ambos productos utilizan la misma materia prima, cuya disponibilidad diaria está limitada a 100 lb. Los productos A y B utilizan esta materia prima a los índices o tasas de 2Lb/unidad y 4 Lb/unidad, respectivamente. El precio de venta de los productores es \$20 y \$ 40 por unidad. Determine la asignación optima de la materia prima a los productores.

6. Mezcla óptima (ración)

Una tienda de animales de estimación cálculo las necesidades diarias de alimentación de cada hámster, en por lo menos, 70 unidades de proteínas, 100 unidades de carbohidratos y 20 unidades de grasas. La tienda dispone en almacén de 6 tipos de raciones mostradas en la tabla1 (en unidades convenientes). Que mezclas de estas raciones Ud. Deberá sugerir para minimizar los costos y satisfacer los requerimientos alimenticios.

Ración	Proteínas	Carbohidratos	Grasas	Costo
A	20	50	4	2
B	30	30	9	3
C	40	20	11	5
D	40	25	10	6
E	45	50	9	8
F	30	20	10	8

7. Mezcla óptima (bebidas)
   Una empresa de bebidas debe preparar, a partir de 5 tipo de bebidas de frutas disponibles en almacén, 500 galones conteniendo por lo menos 20% de jugo de naranja, 10% de jugo de uva y 5% de jugo de mandarina. Los datos referentes al stock de las bebidas son mostrados a seguir ¿Cuánto de cada una de las bebidas la empresa debe utilizar de forma a obtener la composición requerida a un costo total mínimo?

Bebida	Naranja %	Uva %	Mandarina %	Stock en galones	Costo ($) x galón
A	40	40	0	200	1.5
B	5	10	20	400	0.75
C	90	5	0	100	2.00
D	0	70	10	50	1.75
E	0	0	10	800	0.25

8. Problema planteamiento de producción (pintura)
   Una fábrica produce 3 tipos de pinturas básicas. Los datos sobre costos de producción, mano de obra y precio de venta (sobre 1000 lt.) son dados en la siguiente tabla.

Tipo de Pintura	Precio de Venta $	Costo de Producción $	Obreros
A	500	270	6
B	300	230	4
C	350	200	5

   Suponga que la fábrica dispone de 25 obreros y de $ 1000 de capital. Cuanto y que tipo de pintura se debe producir para maximizar los lucros.

9. Problema de programación de producción (cemento)
   Una industria de cemento desea programar su producción bimestral para el próximo año suponga que la demanda prevista para el próximo año sea dada por la siguiente tabla

Bimestre	Cimiento (ton.)
1	120,000
2	130,000
3	200,000
4	180,000
5	80,000
6	150,000

   La capacidad de producción de la industria es de 130,000 ton/bimestre. Entre tanto es posible producir 50,000 ton/bimestre adicionales con un costo adicional d e $ 220 ton./bimestre que lo normal. Los cementos que no se pueden vender deben ser almacenados a un costo de 250 ton/bimestre. La capacidad del almacén es de 60,000 ton./bimestre. Bajo esas condiciones cuantas toneladas de cemento en turno normal y extra deben ser producidos de forma a satisfacer la demanda y reducir los costos de producción y almacén, sabiendo que el costo de producción normal de cemento es previsto por la siguiente tabla.

Bimestre	$ x ton.
1	750
2	730
3	750
4	780
5	790
6	800

10. Problema Planteamiento de Producción (confecciones)
Una industria desea planear su producción para las cuatro estaciones a lo largo del próximo año. Las capacidades de producción y las demandas (todas en unidades convenientes) son las siguientes:

	Primavera	Verano	Otoño	Invierno
Demanda	250	100	400	500
Capacidad normal	200	300	350	150
Capacidad Extra	100	50	100	150

Los costos de producción normal son de $7 por unidad. Los costos de producción por unidad en tiempo extra son de $8 en la estación de primavera y otoño, $9 en el verano y $10 en el invierno. La empresa posee un estoque inicial de 200 unidades, y desea terminar el año sin estoque. Las unidades producidas en horario normal solamente pueden ser expedidas por otras estaciones, y las producidas en horario extra pueden ser vendidas en la misma estación. Los costos de almacén por unidad y por estación son de $ 0.70. Determinar un programa de producción que atienda la demanda a un costo total mínimo.

11. Problema de Logística- Compras (cerámica)
Un conglomerado de 4 industrias cerámicas compra materia prima para su proceso productivo, de 4 haciendas. El costo de adquisición por metro cúbico en dólares es dado por la siguiente tabla:

	Hacienda 1	Hacienda 2	Hacienda 3	Hacienda 4
Industria 1	1.2	1.2	1.1	1.2
Industria 2	1.2	1.3	1.3	1.4
Industria 3	1.3	1.4	1.2	1.3
Industria 4	1.4	1.3	1.4	1.2

Las demandas de consumo en metros cúbicos por semana de las industrias 1,2,3 y 4 son respectivamente 360,420, 480 y 390. Por las normas sobre depredación ambiental las haciendas solo pueden ofertar los siguientes almacenes en metros cúbicos por semana: 500, 600, 400, 600 respectivamente para las haciendas 1,2,3 y 4.
Cual debe ser el programa de compras de costo total mínimo para satisfacer el consumo del conglomerado de industrias.

Ejemplos tipo de problemas de optimización empresariales

12. Aplicaciones Financieras

Selección de Portafolios:

Por ejemplo, la International City Trus (ICT) invierte en créditos a corto plazo, bonos corporativos, oro y préstamos de construcción. La junta de Directores ha colocado límites en la cantidad que puede ser comprometida en cualquier tipo de inversión, con el propósito de asegurar un portafolio diversificado.

La ICT tiene 5 millones de dolares disponibles para inversión inmediata y desea hacer dos cosas:

Maximizar el interés ganado en la inversiones hechas durante los próximos seis meses.

Satisfacer los requerimientos de diversificación establecidos por la junta de directores.

Las especificaciones de las posibilidades de inversión son:

Inversión	Interés Ganado %	Inversión Máxima (millonesUS $)
Créditos a corto plazo	7	1.0
Bonos Corporativos	11	2.5
Oro	19	1.5
Préstamos de Construcción	15	1.8

Adicionalmente el directorio ha especificado que al menos el 55 % de los fondos invertidos deben estar en oro y en préstamos de construcción, y que no menos del 15% debe estar en créditos a corto plazo.

13. Problema de Producción

Wrinkle Furniture

Wrinkle Furniture fabrica dos tipos de armarios, un modelo francés provencial y un modelo danés moderno. Cada armario producido debe pasar por tres departamentos: carpintería, pintura, acabados. La tabla que se muestra contiene toda la información relevante referida a los tiempos de producción por cada tipo de armario producido y las capacidades de producción por día, así como también los ingresos por cada tipo de armario producido.

Estilo	Carpintería horas/unid.	Pintura horas/unid.	Acabado horas/unid.	Ingreso Neto
Provencial Francés	3	1.5	0.75	28
Danés Moderlo	2	1	0.75	25
Capacidad de Departamento	360	200	125	

La firma se ha comprometido con un distribuidor de Indiana a producir un mínimo de 300 armarios de cada tipo por semana (o 60 armarios por día). Al dueño del negocio le gustaría determinar la mezcla del producto que maximize sus ingresos diarios.

14. Problema de mezclas

Problema de Dieta

La Whole Food Nutrition Center usa tres tipos de grano para mezclar un cereal natural que lo vende por libras. Las tiendas anuncian que tomando una ración de dos onzas de cereal con ½ taza de leche, se cubren las necesidades diarias de un adulto en: proteínas, riboflavina, fósforo y magnesio.

El costo de cada tipo de grano, y las cantidades que proporcionan de proteínas, riboflavina, fósforo y magnesio, expresados en unidades/libra, son mostrados en la tabla.

Tipo de Grano	Costo por Libra (centavos)	Proteínas (unid./lb)	Riboflavina (unid./lb)	Fósforo (unid./lib)	Magnesio (unid./lib)
A	33	22	16	8	5
B	47	28	14	7	0
C	38	21	25	9	6

El requerimiento diario mínimo de un adulto es: para proteínas 3 unidades; para riboflavina 2 unidades, para fósforo 1 unidad y para magnesio 0.425 unidades. Whole Foods quiere seleccionarla mezcla de granos cumpla con los requerimientos diarios mínimos de un adulto al mínimo costo.

15. Problema de mezcla

The Low Knock Oil Company produce gasolina de dos cantidades para distribución industrial. Las calidades regular y económica, son producidas por la refinación de una mezcla de dos tipos de petróleo crudo , tipo X100 y tipo X220.

Cada tipo de petróleo crudo difiere no solamente en costo por barril, sino también en composición.

Las tablas indican el porcentaje de ingredientes encontrados en cada tipo de petróleo crudo y el costo por barril por cada uno.

Tipo de petróleo crudo	Ingrediente A %	Ingrediente B %	Ingrediente C %
X100	35	0.55	30.00
X220	60	0.25	34.80

La demanda semanal por gasolina de calidad regular es de al menos 25,000 barriles, mientras que la demanda de la economía es del al menos 32,000 barriles. Al menos 45% de cada barril de la gasolina regular debe ser el ingrediente A. Al menos 50% de cada barril de gasolina económica debe ser del ingrediente B.

La administración de The Low Knock Oil Company debe decir cuántos barriles de cada tipo de petróleo crudo debe comprar cada semana par ala mezcla de tal modo que satisfaga la demanda al mínimo costo.

16. Planeamiento de Trabajo

Arlington Black of Commerce and Industry es un banco que tiene un requerimiento de entres 10 a 18 cajeros, dependiendo de la hora. La hora de almuerzo, desde el mediodía hasta las 2 P.M. es generalmente muy recargada. La tabla muestra el personal necesitado durante varias horas del día, mientras el banco esta abierto.

Período	Número de cajeros requeridos
9 – 10 am	10
10 – 11 am	12
11 – 12 pm	14
12 – 1 pm	16
1 – 2 pm	18
2 – 3 pm	17
3 – 4 pm	15
4 – 5 pm	10

El banco emplea actualmente 12 cajeros a tiempo completo, pero mucha gente esta disponible en su lista de trabajadores a part-time. Un empleado a part-time, debe ser asignado exactamente 4 horas por día, pero puede empezar en cualquier instante entre 9 a.m. y 1 p.m. Los trabajadores a part-time son económicos para porque no tienen una serie de beneficios. Los trabajadores a tiempo completo trabajan de 9 a.m. – 5 p.m., pero tienen una hora para almorzar (la mitad toman su almuerzo a las 11:00 a.m. y la otra mitad a las 12). De esta manera, cada trabajador a tiempo completo tiene 35 horas por semana de tiempo producido.

Por política corporativa, el banco limita las hora de los part-time a un máximo de 50% del total del requerimiento diario. Los trabajadores part-time ganan $ 4 por hora (o $ 16 por día) en promedio, mientras que los de tiempo completo ganan, entre salarios y beneficios, un promedio de $ 50 por día. El banco quisiera minimizar sus costos totales en personal, para ello estaría dispuesto a reducir la cantidad de cajeros a tiempo completo en 1 o más si esto le resultase beneficioso.

<u>Propuesta de formulación a los problemas anteriores</u>

12. Selección de Portafolio

Sean:
X1 = $ invertidos en créditos a corto plazo.
X2 = $ invertidos en bonos corporativos.
X3 = $ invertidos en oro.
X4 = $ invertidos en prestamos para construcción.
F.O.
Máx Z = 0.07 X1 + 0.11 X2 + 0.19X3 + 0.15X4
Sujeto a:
Inversión total
X1 + X2 +X3 +X4 <= 5000,000
Inversiones máximas
X1 <= 1000,000
X2 <= 2500,000
X3 <= 1500,000
X4 <= 1800,000

Otras especificaciones
X3 + X4 >= 0.55 (X1 + X2 +X3 +X4)
X1 >= 0.15(X1 + X2 +X3 +X4)

Condiciones de no negatividad
X1, X2, X3, X4 >= 0

13. Problema de Producción

X1 = armarios modelos francés.
X2 = armarios modelos danés.
F.O.:
Máx Z = 28X1 + 25X2
Sujeto a:
Capacidad departamento de Carpintería
3X1 + 2X2 <= 360
Capacidad departamento de pintura
1.5X1 + X2 <= 200
Capacidad departamento de acabado
0.75X1 + 0.75X2 <= 125
Otros requerimientos
X1 >= 60
X2 >= 60
Condiciones de no negatividad
X1, X2 >= 0

14. Problema de Dieta

Sean:
Xa = Libras de grano A en ración de cereal.
Xb = Libras de grano B en ración de cereal.
Xc = Libras de grano C en ración de cereal.
F.O.:
Mín Z = 0.33 Xa + 0.47 Xb + 0.38 Xc.
Sujeto a:
Unidades de proteínas
22 Xa + 28 Xb + 21 Xc >= 3
Unidades de riboflavina
16 Xa + 14 Xb + 25 Xc >= 2
Unidades de fósforo
8 Xa + 7 Xb + 9 Xc >= 1
Unidades de Magnesio
5 Xa + 6 Xc >= 0.425
Ración
Xa + Xb + Xc >= 1/8 (1/8 libra = 2 onzas)

Condición de no negatividad
Xa, Xb, Xc >= 0

15. Problema de Mezcla

Sean:
X1r = barriles de crudo X100 mezclados para producir gasolina regular.
X1e = barriles de crudo X100 mezclados para producir gasolina económica.
X2r = barriles de crudo X220 mezclados para producir gasolina regular.
X2e = barriles de crudo X220 mezclados para producir gasolina económica.
F.O.:

Mín Z =30X1r + 30X1e + 34.80 X2r + 34.80 X2e

Sujeto a:
Demanda por gasolina regular
X1r + X2r >= 25,000
Demanda por gasolina económica
X1e + X2e >= 32,000
Ingrediente A
0.45(X1r + X2r) <= 0.35 X1R + 0.60 X2r
Ingrediente B
0. 50(X1e + X2e) <= 0.55 X1e + 0.25 X2e
Condiciones de no negatividad.
X1r, X2r, X1e ,X2e >= 0

16. Problema de Trabajo

Sean:
F: cajeros a tiempo completo.
P1: cajeros a part-time que empiezan a las 9 am (salen a la 1 pm)
P2: cajeros a part-time que empiezan a las 10 am (salen a las 2 pm)
P3: cajeros a part-time que empiezan a las 11 am (salen a las 3 pm)
P4: cajeros a part-time que empiezan a las 12 am (salen a las 4 pm)
P5: cajeros a part-time que empiezan a la 1 pm (salen a las 5 pm)
F.O.:
Mín Z = 50F + 16 (P1 +P2 + P3 +P4 +P5)
Sujeto a:

Necesidad de cajeros de 9 a 10

F + P1 >= 10

Necesidad de cajeros de 10 a 11
F + P1 + P2 >= 12

Necesidad de cajeros de 11 a 12
F/2 + P1 + P2 + P3 >= 14

Necesidad de cajeros de 12 a 1
F/2 + P1 + P2 + P3 + P4 >= 16

Necesidad de cajeros de 1 a 2
F + P2 + P3 + P4 + P5 >= 18

Condiciones de no negatividad
F, P1, P2, P3, P4, P5 >= 0

Necesidad de cajeros de 2 a 3
F + P3 + P4 + P5 >= 17

Necesidad de cajeros de 3 a 4
F + P4 + P5 >= 15

Necesidad de cajeros de 4 a 5
F + P5 >= 10

Disponibilidad de cajeros a tiempo completo
F <= 12
Otros requerimientos
4(P1 + P2 + P3 + P4 + P5) <= 0.5 (112)

MÉTODO GRÁFICO

Objetivo

Aprender a resolver gráficamente un modelo de programación lineal de dos variables utilizándolo como una herramienta eficaz para obtener una solución óptima.

Introducción

- Método gráfico: usa geometría plana.
- Método gráfico: para problemas con dos variables de decisión.
- Proporciona idea clara de lo que sucede al resolver un problema de programación lineal.

Desigualdades

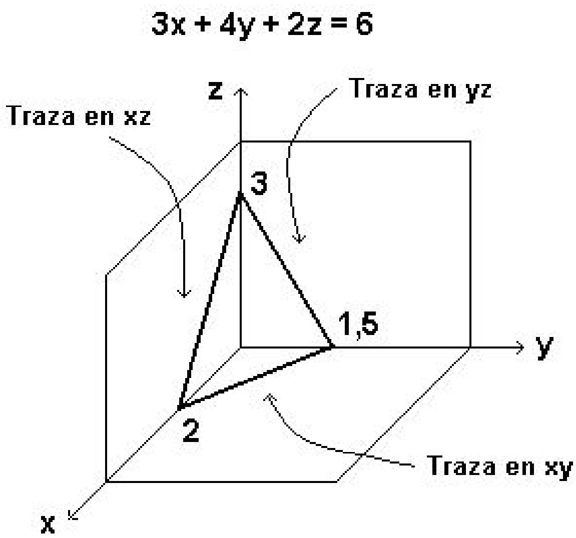
Expresiones matemáticas de la forma:

$A_1x_1 + A_2x_2 + ... +A_nx_n \leq k$

$A_1x_1 + A_2x_2 + ... +A_nx_n \geq k$

$A_1x_1 + A_2x_2 + ... +A_nx_n < k$

$A_1x_1 + A_2x_2 + ... +A_nx_n > k$



Gráfica de desigualdades

Procedimiento

1.Gráfica de la igualdad: convierta la desigualdad en igualdad y grafique la recta que representa esta ecuación.

2. Elegir un punto de ensayo: elegir cualquier punto de ensayo que no pertenezca a la recta. Si el punto 0,0 no pertenece a la recta sería un buen punto de ensayo.

3. Evalúe el primer miembro de la expresión:

Sustituya el punto de ensayo en el primer miembro de la desigualdad.

4. Determine si el punto de ensayo satisface la desigualdad:

a) Si el punto de ensayo satisface la desigualdad, la desigualdad esta representada por la recta y todos los puntos de la parte del plano en la que se encuentra el punto de ensayo.
b) Si el punto de ensayo no satisface la desigualdad, entonces la recta y todos los puntos del plano que no están del lado del punto de ensayo satisfacen la desigualdad.

Líneas de Contorno

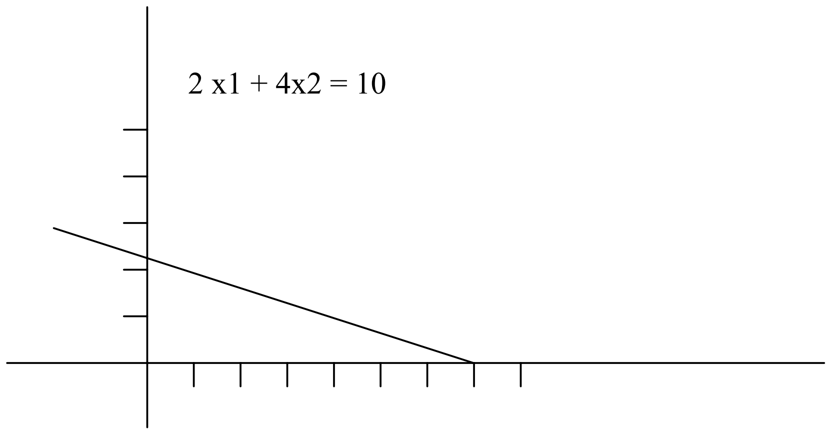
- El contorno de una función *f* de dos variables es el conjunto de todos los pares (x1,x2) para los cuales la función (x1,x2) toman un valor constante específico.

Ejemplo

supóngase que estamos vendiendo dos productos. La utilidad por unidad del producto 1 es $ 2 y la del producto 2 es $ 4. Entonces la utilidad obtenida por la venta de x1 unidades del producto 1 y x2 unidades del producto 2

Función Utilidad f(x1,x2) : 2 x1 + 4x2

Ahora si queremos graficar todas las combinaciones de cantidades de cantidades del producto 1 y 2 para tener una utilidad igual a 10, entonces la función utilidad sería.



El gráfico de un contorno se resume en el gráfico de una igualdad.
Los contornos de una función lineal forman una familia de rectas paralelas.
Se reduce a gráfico de igualdades o contornos y después la identificación del lado derecho.

Ejemplos

Graficar:

1. 2X1 + X2 < = 8
2. X1 + 2X2 < = 12
3. 6X1 + 7X2 > = 12

4. $5X_1 + 6X_2 \geq 9$
5. $3X_1 + 4X_2 > 5$
6. $4X_1 + 9X_2 < 4$
7. $5X_1 + 3X_2 \leq 15$
8. $12X_1 \geq 36$

Graficar los siguientes contornos e identificar la familia de rectas ligadas a ellos.

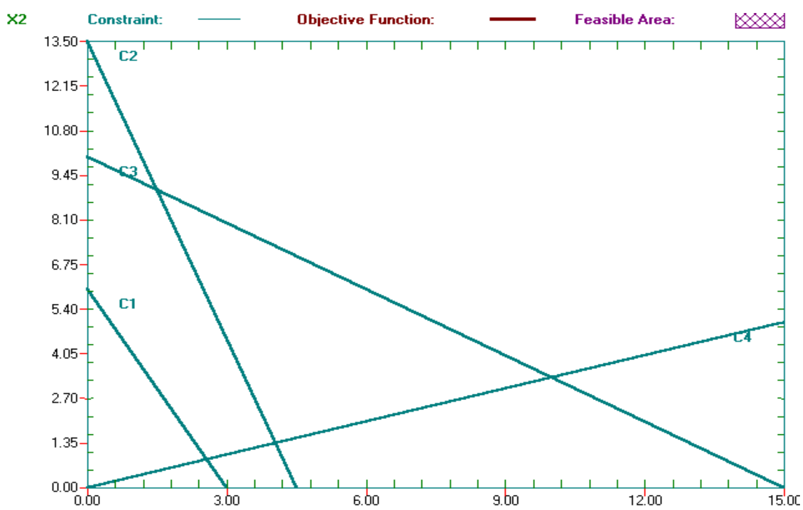
1. $3X_1 + 4X_2 = 15$
2. $4X_1 - 8X_2 = 24$
3. $2X_1 - 3X_2 = 6$
4. $7X_1 + 7X_2 = 56$

- En esencia una restricción es una limitación al modelo de programación lineal.
- Una restricción viene dada por una desigualdad.
- El gráfico de una restricción esta dado por el gráfico de la desigualdad que representa la restricción.

En resumen se grafican en el mismo plano tantas desigualdades como restricciones presente el modelo a trabajar.
Al graficar todas las restricciones
Se generará un área delimitada por las mismas. L región encerrada por todas las restricciones del modelo se le llamará región factible. Siempre ocurrirá que, al añadir más restricciones, o bien se reduce el conjunto factible o bien no se altera. Nunca se podrá agregar el conjunto factible.

<u>Conjunto factible</u>
Es el conjunto de todos los valores no negativos de las variables de decisión que satisfacen todas las restricciones simultáneamente.

17. Si hablamos de un modelo con dos variables de decisión el conjunto factible viene dado por pares que corresponde a cada variable de decisión.



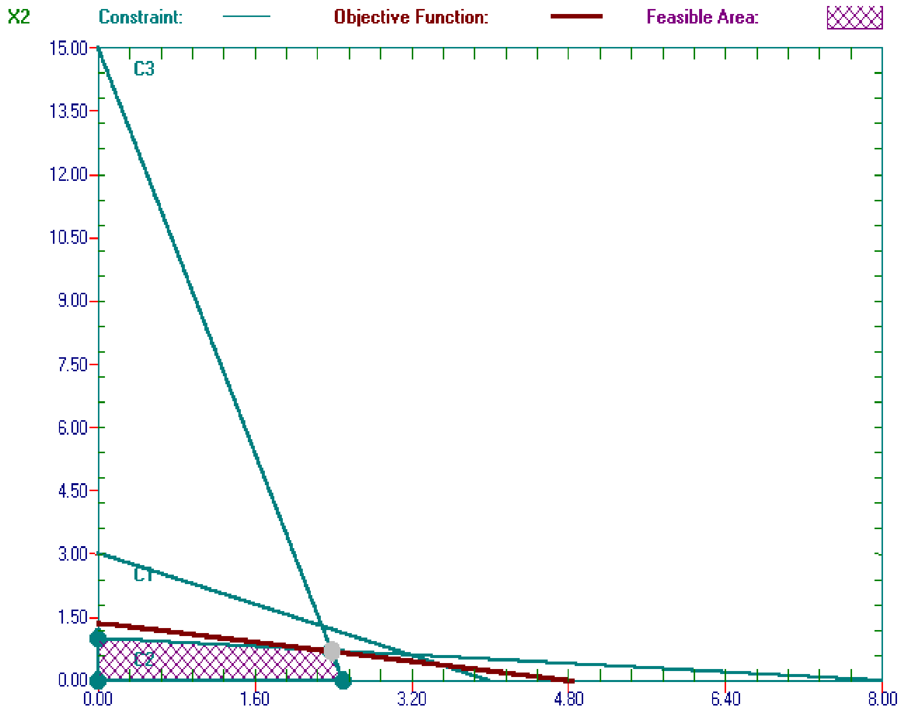
Ejemplo

Graficar el siguiente modelo de programación lineal:

F.O. Max 2x1 +7x2

Sujeto a:

3x1 + 4x2 >= 12
x1 + 8 x2 <= 8
6x1 + x2 <= 15



Graficar el siguiente modelo de programación lineal:

F.O. Max 5 A + 6B
Sujeto a:
3A + 5B <= 30
2A + 3B <= 12
A + 5B >= 15
4A + B <= 8

Graficar el siguiente modelo de programación lineal:
F.O. Max 3 A+ 7 B
Sujeto a:
6A + 11B <= 66
2A + B <= 10
0.5A + 0.4B >= 6

A + B >= 4

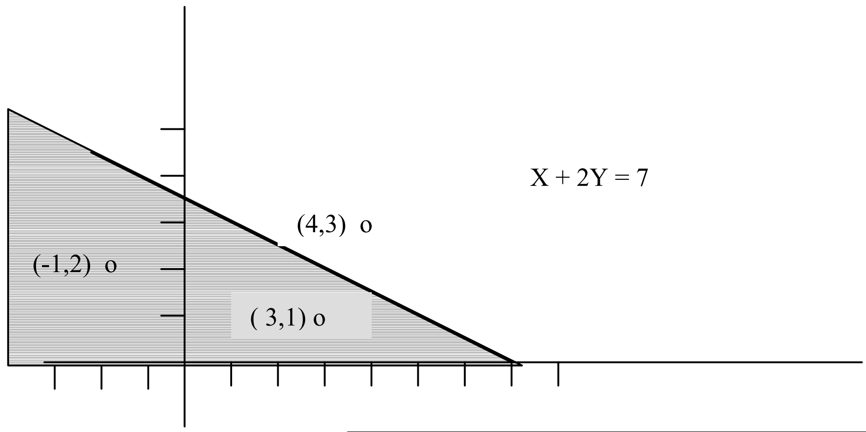
Graficar el siguiente modelo de programación lineal:
F.O. Max 12A + 10B
Sujeto a:
6A + B <= 6
9A + 4B <= 18
2A + 5B <= 20
A + B <= 1

Sistema de Inecuaciones
La gráfica de una inecuación en dos variables **x , y** consta de todos los puntos **(x,y)** cuyas coordenadas satisfagan las desigualdad.

Ejemplo:
Grafique x + 2y < = 7

- Empiece graficando la recta x + 2y = 7
- Tome algunos puntos del plano al azar para ver si satisfacen la desigualdad.

Solución



(3,1) : (3) + 2(1) <= 7 está en la gráfica
(-1,2) : (-1) + 2(2) <=7 está en la gráfica
(4.3) : (4) + 2(3) > 7

Ejercicios (Solución gráfica de Programación Lineal)

1. El caramelo S.A. tiene una pequeña fábrica. Su producción se limita dos productos, Alfa y Beta. El departamento de contabilidad de la empresa ha calculado las contribuciones de cada producto en $ 10,000 para Alfa y $12,000 para Beta.

Cada producto pasa por tres departamentos de la fábrica. Los requerimientos de tiempo para cada producto y el total del tiempos disponibles en cada departamento son:

<table>
<tr><th rowspan="2">DEPARTAMENTO</th><th colspan="2">HORAS REQUERIDAS</th><th rowspan="2">HORAS DISPONIBLES ESTE MES (horas/hombre)</th></tr>
<tr><th>ALFA</th><th>BETA</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2.0</td><td>3.0</td><td>1500</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3.0</td><td>2.0</td><td>1500</td></tr>
<tr><td>3</td><td>1.0</td><td>1.0</td><td>600</td></tr>
</table>

¿Cómo se pueden maximizar las utilidades o contribuciones de El Carmelo S.A.? (Soluciónelo gráficamente)

2. La empresa Electro Andina S.A., produce dos tipos de televisores: el tipo 1 es a color y el tipo 2 es blanco y negro. El pronóstico de ventas indico que no más de 4000 unidades del televisor de tipo1 podrían ser vendidas; igualmente, el volumen de ventas para el televisor tipo 2 no podrá exceder las 6000 unidades.

   Cada televisor en blanco y negro requiere 2 horas/hombre de trabajo, mientras que cada televisor a color requiere 3 horas/hombre.

   El tiempo de producción disponible en la división de televisión para ventas es de 24,000 horas/hombre y las ventas de televisores del tipo 1 y tipo 2 dan unos beneficios por unidad vendida de $300 y $5oo, respectivamente .

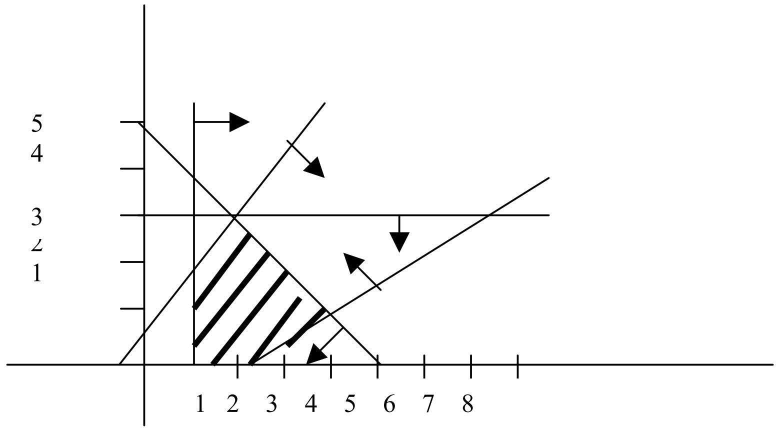
   Determine cómo se debe organizar la producción si desea maximizar los beneficios (Emplee el método gráfico).

3. Determine en forma gráfica el espacio de soluciones de las siguientes Desigualdades.

   Z: Mín: 2x1 + x2
   Sujeto a:
   5x1 + 2x2 >= 10
   4x1 + x2 >= 9
   3x1 + 3x2 <=10

   ¿Qué restricciones son redundantes? Reduzca el sistema al menor número de restricciones que definirán el mismo espacio de soluciones.

4. Determine las restricciones asociadas con el espacio de soluciones que se representan en la siguiente figura, e identifique todas las restricciones redundantes.



5. Dado el siguiente modelo de programación lineal:

F.O. X(máximo) 6 A - 2B

Sujeto a:

A - B <= 1
3A - B <= 6
A,B >= 0

Demuestre gráficamente que en la solución óptima A Y B pueden aumentarse en forma indefinida y el valor de la función objetivo se mantiene constante.

6. Dado el siguiente modelo de programación lineal:}

F.O. X(máximo) 4A + 4B

Sujeto a:

2A - 7B <= 21
3A + B <= 6
A,B >= 0

1. Teniendo en cuenta la figura del problema 4, determine la solución óptima suponiendo que la función objetivo está como aparece a continuación:

a) Z(Mínimo) = X – 2Y
b) Z(Máximo) = X
c) Z(Mínimo) = X
d) Z(Mínimo) = 3X + 4Y
e) Z(Máximo) = -3X + 4Y
f) Z(Mínimo) = 2X + 6Y

8. Dado el siguiente modelo de programación lineal:

$$F.O.\ Z(\text{máximo})\ 5X + 3Y$$

Sujeto a:

$$X + Y <= 4$$
$$5X + 2Y <= 10$$
$$X,Y >= 0$$

Determine el incremento en el recurso 1, que hace que esta restricción sea redundante, y cuál es el cambio en el valor de la función objetivo.

2. Haga una gráfica de los puntos (x,y) que satisfaga cada una de las siguientes condiciones:

$2x + 6y = 12$
$2x + 6y > 12$
$2x + 6y >= 12$
$2x + 6y < 12$
$2x + 6y <= 12$

3. Haga una gráfica de los puntos (x,y) que satisfaga cada una de las siguientes condiciones:

$6x + 2y = 36$
$6x + 2y > 36$
$6x + 2y >= 36$
$6x + 2y < 36$
$6x + 2y <= 36$

11.Considere el siguiente problema de programación lineal

$$Z(\text{máximo}): 6X + 4Y$$

S.A:

$$2X+2Y >= 20$$
$$-4X - 2Y >= -24$$
$$Y <= 4$$
$$X,Y >= 0$$

a) Use el método gráfico para encontrar la solución gráfica.
b) Encuentre los valores de déficit o superávit de cada restricción.

12.Considere el siguiente problema de programación lineal

Z(máximo): 600 E + 1000F
S.A:
1000E + 60F <= 21000
4000E + 800F <= 680000
E + F <= 290
12E + 30F <= 6000
E, F >=0

a) Sea E el eje horizontal y F el eje vertical; use los recursos gráficos para encontrar la solución óptima y el valor óptimo de este problema. Rotule los vértices de conjunto de soluciones como I, II, III, IV y V, donde I está sobre el eje vertical, arriba del origen, y continúe en el sentido de las manecillas del reloj, terminando con V en el origen.
b) Una de las restricciones es redundante en el sentido de que uno no desempeña papel alguno en la determinación del conjunto de restricciones ¿Cuál es?

Casos Especiales

Solución degenerada: Ocurre cuando más restricciones de las necesarias determinan el punto extremo

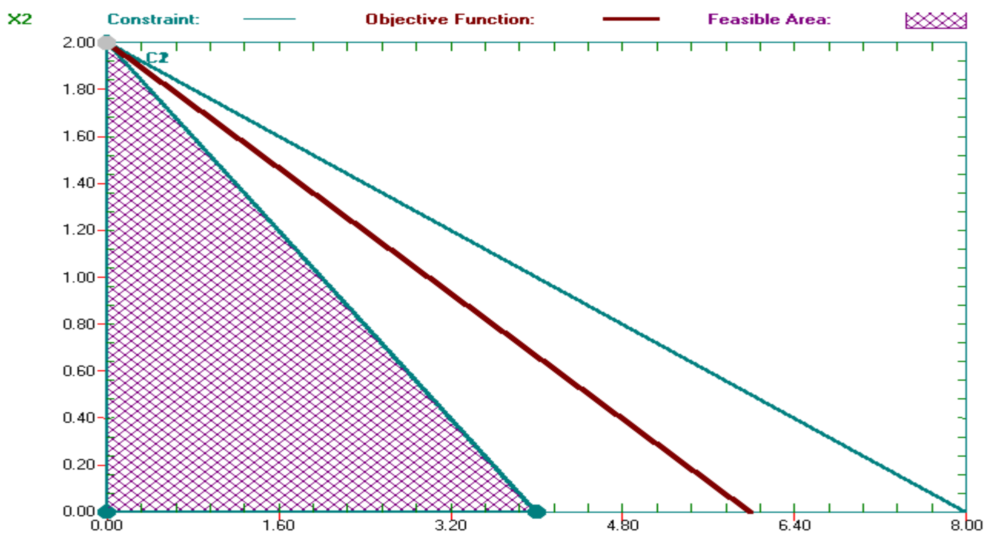
Z(máximo): 3x1 + 9x2

S.A.

x1 + 4x2 <= 8
x1 +2x2 <= 4
x1, x2 >= 0

Tema de análisis

El estudiante debe realizar la gráfica con los datos anteriores



Se ve que las dos restricciones anteriores

x1 + 4x2 <= 8
x1 +2x2 <= 4

pasan a través del punto óptimo de solución óptima (degenerado), el cual puede determinarse solamente por dos restricciones.

Solución Múltiple

Este caso ocurre cuando la función objetiva es paralela a una restricción obligatoria, que viene a ser aquella que se satisface en sentido de igualdad por la solución óptima. En tal caso, la función objetivo puede tener el mismo valor óptimo en más de una solución básica.

Ejemplo:

Z(máx): 4x1 +14x2

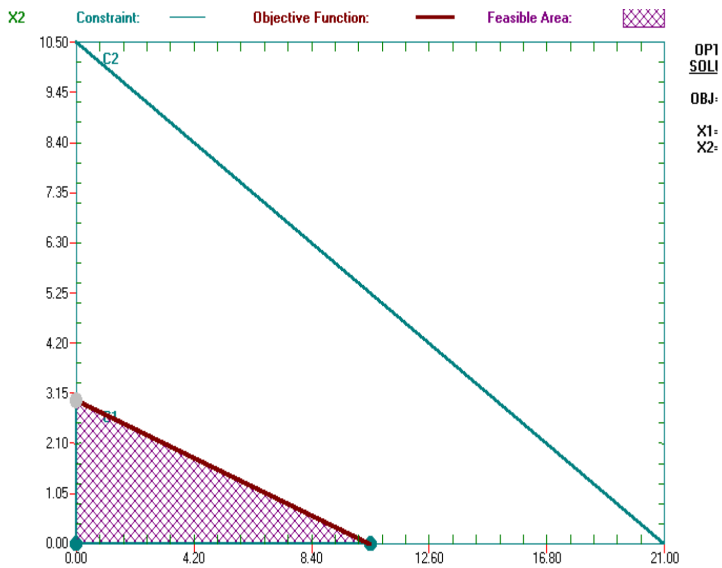
S.A.: 2x1 +7x2 <= 21

x1 + 2x2 <= 21

x1, x2 >=0

Tema de análisis

El estudiante debe realizar la gráfica con los datos anteriores.



Solución Ilimitada: Este caso ocurre cuando el espacio de soluciones no está limitado, de tal manera que el valor de la función objetivo puede aumentar indefinidamente.

Ejemplo:

Z(máximo) : 2 x1 + x2

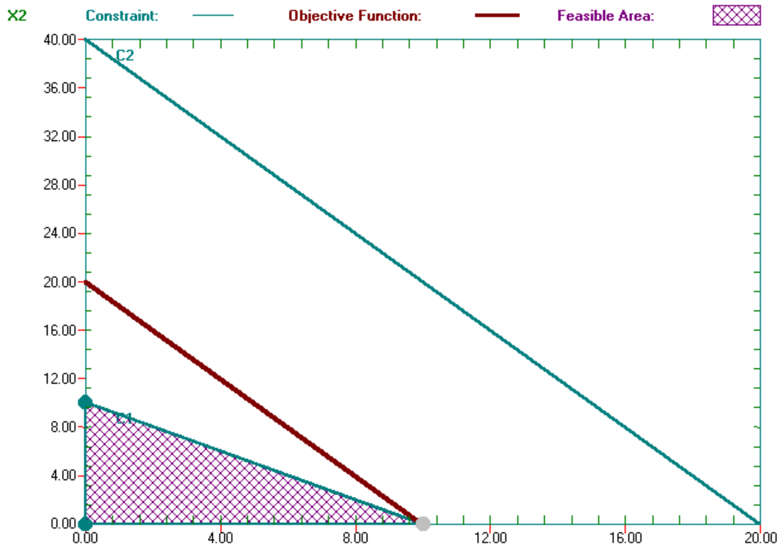
S.A.: x1 +x2 <= 10

2x1 + x2 <= 40

x1, x2 >= 0

Tema de análisis

El estudiante debe realizar con los datos anteriores



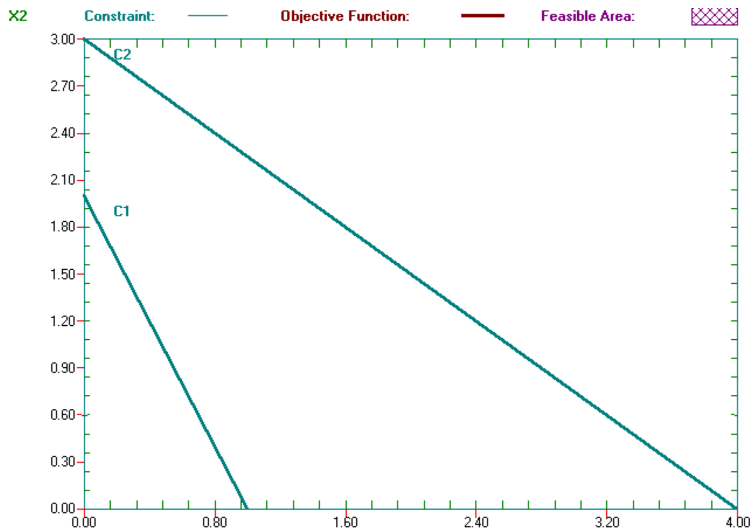
Se concluye que el problema no tiene solución acotada, sino ilimitada

Solución no factible: Este caso ocurre cuando el problema es tal que ningún punto puede satisfacer todas las restricciones. En este caso, ese espacio de soluciones está vacío y el problema no tiene solución factible

Ejemplo

Z(máximo) = 3x1 +2x2
S.A: 2x1 +x2 <= 2
3x1 +4x2 >= 12
x1,x2 >= 0

Desarrollando el método gráfico se obtiene



Se ve que el problema no tiene espacio de soluciones factibles

Definición del problema

La compañía DELCROSA fabrica dos clases de máquinas, cada una requiere de una técnica diferente de fabricación.

La máquina de lujo requiere de 18 horas de mano de obra, 9 horas de prueba y su contribución a la utilidades de $ 460. La maquina estándar requiere de 3 horas de mano de obra, 4 horas de prueba y su contribución en la utilidad es de $200.

Se dispone de 800 horas para mano de obra y de 600 horas para prueba cada mes.

Se ha pronosticado que la demanda mensual para el modelo de lujo no es más de 80.

La gerencia desea saber el número de máquinas de cada modelo, que deberá producirse .

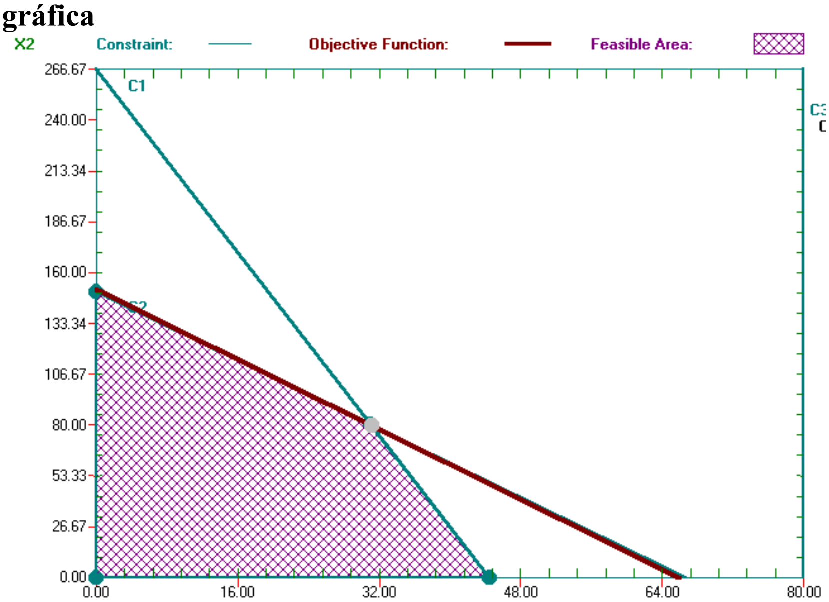
1.Formulación del modelo de programación Lineal

Máx: 460 x1 + 200x2

Sujeto a;

18x1 + 3x2 <= 800
9x1 + 4x2 <= 600
x1 <= 80
x1, x2 >= 0

2. Solución gráfica



Ejercicios

Resolver gráficamente los siguientes modelos

1. Máx 5000x1 + 3000x2

Sujeto a:

3x1 +5x2 <= 15
500x1 + 200 x2 <= 100
x1,x2 <= 0

2. Máx 4x1 +4 x2

Sujeto a:

-2x1 +2x2 <= 2
-x1 + 2x2 <= 2
x1, x2 >= 0

3. Máx 2x1 + 2x2

Sujeto a:

x1 +x2 <= 2
x1 + x2 >= 4
x1, x2 >= 0

4, Min 3x1 + 5x2

Sujeto a:

3x1 – 2x2 <= 18
x1 <= 4
x2 <= 6
x1 + 4x2 <= 10
x1,x2 >= 0